درس نهم : نمایش گروه ها

۱ مقدمه

هدف این درس معرفی مفاهیم اصلی نظریه نمایش گروه هاست[1]. به زبان ساده منظور از نمایش دادن یک گروه آن است که به هر عضو گروه مثل g یک ماتریس مثل $D(g)$ نسبت بدهیم به نحوی که این ماتریس ها بین خود، همان جدول ضربی را داشته باشند که عناصر گروه دارند. در این درس نخست انگیزه ساختن نمایش گروه را از نظر فیزیکی بررسی می کنیم. سپس خواص اساسی نمایش ها را بررسی می کنیم. بعد از آن توجه خود را معطوف می کنیم به نمایش گروه های متناهی و تقریباً تا پایان درس خود را به این چارچوب محدود می کنیم. برای یک گروه متناهی این سوال های طبیعی وجود دارند که اصولاً چه نمایش هایی و با چه ابعادی وجود دارند؟ و این نمایش ها را به طور سیستماتیک چگونه می سازند؟ به همه این سوال ها پاسخ می دهیم و مثالهای متعددی نیز ارائه می دهیم. در پایان درس به طور اختصار به نمایش گروه های لی اشاره می کنیم. دلیل این اختصار رابطه‌ی ساده و بنیادینی است که بین ساختار گروه و جبرلی آن وجود دارد، یعنی این که هر عضو گروه مثل g به صورت $g=e^{\theta^iT_i}$ قابل نوشتن است که در آن T_i ها یک جبر لی تشکیل می دهند. این رابطه ساده به ما اجازه می دهد که از طریق مطالعه ساختمان جبر، ساختمان گروه لی را بفهمیم و این کاری است که در درسهای آینده انجام می دهیم. این رابطه ساده هم چنین اجازه می دهد که نمایش های گروه را نیز از طریق نمایش های جبر بدست آوریم. به همین دلیل نمایش جبرهای لی که پایان بخش این درس در نظریه گروه و جبرلی است تنها در درس پایانی ارایه خواهد شد.

۲ چرا در فیزیک به نمایش گروه ها نیاز داریم؟

یک گروه مثل گروه دوره ای $G:=\{e,a,a^2,a^3\}$ درنظربگیرید. این گروه، زیرگروهی از تقارن های شکلی مثل یک گل چهاربرگی است (شکل ۱). دراین گروه a درواقع نشان دهنده یک دوران به اندازه زاویه ۹۰ درجه است وطبیعی است که این دوران شکل را دست نخورده باقی می گذراد.

هرگاه بخواهیم این گل به طور دقیق توصیف کنیم می بایست از مفاهیم مکانیک کوانتمی استفاده کنیم و به این نکته توجه کنیم که حالت این گل توسط یک برداردریک فضای هیلبرتِ V نشان داده می شود. بعد این فضای هلیبرت بستگی به درجات آزادی ای دارد که برای توصیف گل بکارمی بریم و این به نوبه خود بستگی به این دارد که ما می خواهیم توصیف مان ازگل چقدردقیق باشد. البته ماهیچگاه برای توصیف ماکروسکوپی یک گل از مکانیک کوانتومی استفاده نمی کنیم ولی این مثال به ما کمک می کند که موضوع نمایش گروه را بفهمیم زیرادرطبیعت دنیای اتم ها و ذرات نیز مثل همین گل دارای تقارن هایی هستند و ما برای توصیف آنها مجبوریم ازمکانیک کوانتومی استفاده کنیم. فرض کنید که حالت یک گل را درفضای هیلبرت V با $|\psi\rangle$ نشان دهیم. قبل ازهرکاری ماباید بتوانیم بگوییم که عمل تقارنی ما حالت گل را به چه حالتی تبدیل می کند. درواقع باید بفهمیم که چه عملگری باید روی حالت گل اثربدهیم تا حالت گل چرخش یافته بدست آید؟ ماواقعاً نمی دانیم که چرخش

[1] Representation Theory of Groups

یگ گل به اندازه زاویه ۹۰ درجه درفضای سه بعدی ملموس متناظربا چه عملی درفضای هیلبرت مجردی است که حالت کوانتومی گل را توصیف می کند. تنها می دانیم که مناسب است اگر این عمل a را با یک عملگر خطی $U(a): V \longrightarrow V$ نشان دهیم که حالت $|\psi\rangle$ گل را به حالت $U(a)|\psi\rangle$ تبدیل می کند. انتظارداریم که اندازه بردارحالت همچنان یک باقی بماند بنابراین تقاضا می کنیم که $U(a)$ یک عملگر یکانی باشد.

حال ازاین شهود استفاده می کنیم که اگر گل رایک بار به اندازه ۹۰ درجه و پس از آن به اندازه ۹۰ درجه بچرخانیم مثل آن است که آن را به ا ندازه ۱۸۰ درجه چرخانده باشیم. یعنی حاصل عمل a وپس ازآن a عمل a^2h است. درنتیجه تقاضا می کنیم که این شرط روی عملگرهایی نیز که نمایش دهنده چرخش حالت گل باشند نمود پیداکند یعنی اینکه

$$U(a)U(a) = U(a^2). \tag{1}$$

درحالت کلی تر اگربخواهیم راجع به اثریک گروه $G = \{e, g, g', g", \cdots\}$ روی حالت یک شیء کوانتومی صحبت کنیم می بایست به هرعضو $g \in G$ عملگری یکانی مثل $U(g): V \longrightarrow V$ نسبت دهیم که روی فضای هیلبرت مربوط به آن شی ء کوانتومی عمل می کند و دارای این شرط مهم است که

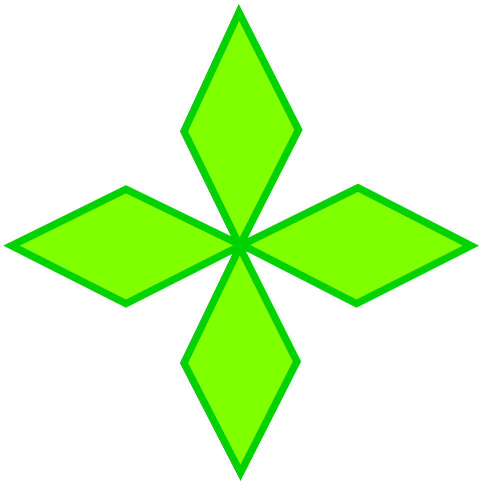
$$U(g)U(g') = U(gg'). \tag{2}$$

درچنین صورتی می گوییم که گروه راروی فضای هیلبرت نمایش داده ایم. هرگاه برای فضای هیلبرت V پایه این انتخاب کنیم، عملگر $U(g)$ تبدیل به یک ماتریس یکانی مربعی می شود. بنابراین می توان نمایش دادن یک گروه را به معنای نسبت دادن ماتریس ها به عناصرگروه نیزدرنظرگرفت به طوری که ضرب ماتریس ها ازهمان قاعده ضرب گروه پیروی کند. بعدازاین مقدمه به تعریف دقیق نمایش می رسیم.
قبل ازآن به تعریف یک اصطلاح احتیاج داریم.

تعریف: هرگاه V یک فضای برداری باشد، مجموعه تمام عملگرهای خطی وارون پذیر از V به V را با $End(V)$ نمایش می دهیم.[2] این مجموعه یک فضای برداری است زیرا اگر A و B دو عملگرخطی و α یک عدد حقیقی یا مختلطِ دلخواه باشد، آنگاه $\alpha A + B$ نیز یک عملگرخطی است. هم چنین این مجموعه نسبت به ضرب دو عملگرخطی نیز یک گروه است. ضرب دو عملگرخطی به معنای عملِ متوالی آنهاست یه این معنا که $(AB)(x) = A(B(x))$.
تعریف: هرگاه G یک گروه و V یک فضای برداری باشد، نگاشت $D: G \longrightarrow End(V)$ را یک نمایش[3] می خوانیم هرگاه‌شرط زیربرقرارباشد:

$$D(g)D(g') = D(gg'). \tag{3}$$

[2]این نماد از کلمه $Endomorphism$ به معنای نگاشت خطی وارون پذیر استخراج شده‌است.
[3]Representation



شکل ۱: یک گل چهاربرگی که گروه دوره ای G زیرگروهی ازتقارن های آن است.

به عبارت دیگر D یک همسانی از G به $End(V)$ است.

تعریف: بعد فضای برداری V را بعد نمایش [4] می خوانیم. هرگاه فضای برداری بعد متناهی داشته باشد، نمایش را متناهی [5] و هرگاه فضای برداری بعد نامتناهی داشته باشد نمایش را بی نهایت بعدی [6] می خوانیم. هرگاه به ازای هرg، $D(g)$ یک عملگریکانی باشد، نمایش را یکانی می خوانیم. دراین شرایط لازم است که فضای برداری V مجهزبه یک ضرب داخلی باشد. برای نمایش یکانی معمولاً از حرف U بجای D استفاده می کنیم.

همینجا تذکرمی دهیم که ممکن است که یک گروه تنها نمایش هایی با بعدهای مشخص داشته باشد.

نتیجه ها: ازتعریف بالا نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} D(e) &= I \\ D(g^{-1}) &= D(g)^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

تعریف: نمایش یکانی [7] نمایشی است که درآن

$$(U(g))^\dagger = (U(g))^{-1}, \qquad \longrightarrow \qquad (U(g))^\dagger = U(g^{-1}). \tag{5}$$

به عبارت بهتر دریک نمایش یکانی عملگرهای $U(g)$ عملگرهای یکانی هستند. درواقع هرگاه فضای V یک ضرب داخلی $\langle , \rangle$ داشته باشد، نمایش یکانی نمایشی است که ضرب داخلی را حفظ کند، یعنی

$$\langle U(g)x, U(g)y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \forall\, g \in G, \quad x, y \in V. \tag{6}$$

Dimension of Representation[4]
Finite Dimensional Representation[5]
Infinite Dimensional Representation[6]
Unitary Representation[7]

۳ مثال های ساده ای ازنمایش

مثال ۱: فرض کنیدکه G گروه دوری $G=\{e,a,a^2\}$ است. D_1 یک نمایش یک بعدی برای این گروه است.

$$D_1(e)=1, \qquad D_1(a):=e^{\frac{2\pi i}{3}}, \qquad D_1(a^2):=e^{\frac{4\pi i}{3}}. \tag{7}$$

مثال ۲: G راهمان گروه مثال ۱ می گیریم. D_2 یک نمایش سه بعدی از این گروه است:

$$D_2(e):=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a):=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2(a^2):=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

مثال ۳: G را گروه دوری $G=\{e,a,a^2,\cdots a^{n-1}\}$ بگیرید. دراین صورت یک نمایش یک بعدی برای این گروه عبارت است از:

$$D_1(a^k)=e^{\frac{2\pi ik}{n}}, \quad k=0,1,2,\cdots n. \tag{9}$$

دقت کنیدکه چون گروه دوری است و تنها شرطی که دارد آن است که $a^n=e$ است تنها می بایست ماتریسی پیدامی کردیم که درشرط $D(a)^n=1$ صدق می کرد که این شرط با ماتریس یک بعدی $D_1(a)=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ برآورده شد.
یک نمایش n بعدی ازهمین گروه به صورت زیرساخته می شود: یک فضای n بعدی بابردارهای پایه $\{|0\rangle,|1\rangle,\cdots|n-1\rangle\}$ درنظرمی گیریم. آنگاه ماتریس S را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$S|i\rangle=|i+1\rangle \tag{10}$$

که درآن عمل جمع به سنج n انجام می شود. واضح است که $S^n|i\rangle=|i\rangle$. بنابراین $S^n=I$. درنتیجه یک نمایش n بعدی به شکل زیرداریم:

$$D_2(e)=I, \quad D_2(a)=S, \quad D_2(a^2)=S^2,\cdots. \tag{11}$$

مثال ۴: G راهرگروه دلخواه و V رانیز فضای اعداد حقیقی بگیرید. دراین صورت همواره یک نمایش بدیهی [8] یک بعدی وجود دارد که درآن

$$D(g)=1, \quad \forall g\in G. \tag{12}$$

مثال ۵: G را گروه جایگشت S_n درنظربگیرید. دراین صورت یک نمایش یک بعدی به صورت زیراست :

$$D(g) \;=\; 1, \quad \text{اگر } g \text{ یک جایگشت زوج باشد}$$

[8] Trivial Representation

$$D(g) \quad = \quad -1, \quad \text{اگر } g \text{ یک جایگشت فرد باشد} \tag{13}$$

مثال ٦: ضرب تانسوری نمایش ها[9]: هرگاه $D_1 : G \longrightarrow End(V)$ و $D_2 : G \longrightarrow End(W)$ دونمایش باشند می توان نمایش $D_1 \otimes D_2$ به صورت زیرساخت:

$$(D_1 \otimes D_2)(g) := D_1(g) \otimes D_2(g). \tag{14}$$

برخواننده است که نمایش بودن $D_1 \otimes D_2$ راتحقیق کند.

مثال ٧: هرگاه $D : G \longrightarrow End(V)$ یک نمایش باشد، همواره می توان نمایش یک بعدی $D_0 : G \longrightarrow R$ را به صورت زیرساخت:

$$D_0(g) := det(D(g)), \tag{15}$$

که درآن $det(D(g))$ دترمینان ماتریس $D(g)$ است.

قضیه: هرگاه $D : G \longrightarrow End(V)$ یک نمایش و $S \in End(V)$ یک تبدیل خطی وارون پذیرباشد آنگاه $D' := SDS^{-1}$ نیزیک نمایش است.

اثبات:

$$D'(g_1)D'(g_2) = (SD(g_1)S^{-1})(SD(g_2)S^{-1}) = S(D(g_1)D(g_2))S^{-1} = SD(g_1g_2)S^{-1} = D'(g_1g_2). \tag{16}$$

تعریف: هرگاه برای دونمایش D و D' یک تبدیل $S \in End(V)$ وجود داشته باشد به قسمی که برای تمام g هاداشته باشیم $D'(g) = SD(g)S^{-1}$، آن دونمایش معادل [10] خوانده می شوند. دونمایشی که چنین نباشند نمایش های غیرمعادل خوانده می شوند.

مثال: برای گروه $Z_2 = \{e, a\}$ می توان دونمایش دوبعدی زیررادرنظرگرفت:

$$D_1(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

[9] Tensor or (direct) product of representations

[10] Equivalent Representations

و

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

این دونمایش معادلند. زیرا

$$D_2(g) = SD_1(g)S^{-1}, \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

تعریف: هرگاه $D : G \longrightarrow End(V)$ یک نمایش از گروه G روی فضای مختلط V باشد، نمایش مزدوج [11]آن را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$D^*(g) := D(g^{-1})^\dagger. \tag{20}$$

واضح است که اگر D نمایش باشد، D^* نیزیک نمایش است، زیرا

$$\begin{aligned} D^*(g)D^*(g') &= D(g^{-1})^\dagger D(g'^{-1})^\dagger = (D(g'^{-1})D(g^{-1}))^\dagger \\ &= D(g'^{-1}g^{-1})^\dagger = D((gg')^{-1})^\dagger = D^*(gg') \end{aligned} \tag{21}$$

تعریف: فرض کنید که V و W دوفضای به ترتیب m بعدی و n بعدی باشند جمع مستقیم[12] این دوفضا به شکل زیر تعریف می شود.

$$V \oplus W := \{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, | \, v \in V, \quad w \in W\}. \tag{22}$$

جمع دوبرداروضرب یک برداردریک اسکالر به شکل زیرتعریف می شود:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+v' \\ w+w' \end{pmatrix}, \\ &\alpha \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha w \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{23}$$

برخواننده است که تحقیق کند $V \oplus W$ با جمع و ضرب تعریف شده دربالا واقعاً یک فضای برداری $m+n$ بعدی است.

[11] Contragradient Representation
[12] Direct Sum

به عنوان مثال خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که $R^3 = R^2 \oplus R$.

حال دسته ای ازتبدیلات خطی روی $V \oplus W$ وجود دارند که به شکل زیرهستند:

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{24}$$

این نوع تبدیلات خطی درواقع روی فضای V مثل تبدیل خطی A وروی فضای W مثل تبدیل خطی B عمل می کنند. به همین جهت بهتراست که آنهارا با $A \oplus B$ نشان دهیم. رابطه (24) نشان می دهد که اگر برای فضای برداری V و W پایه انتخاب کنیم و تبدیلات روی آنهارا با ماتریس نشان دهیم، ماتریس تبدیل T بصورت بلوکه قطری درخواهد آمد. البته همه تبدیلات روی فضای $V \oplus W$ به صورت (24) نستند.

حال فرض کنید که ازیک گروه دو نمایش $D_1 : G \longrightarrow End(V)$ و $D_2 : G \longrightarrow End(W)$ داشته باشیم. آنگاه ازاین دونمایش همواره می توان یک نمایش بابعد بزرگ تر به ترتیب بدیهی زیرساخت:

$$(D_1 \oplus D_2) : G \longrightarrow End(V \oplus W), \qquad (D_1 \oplus D_2)(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

این نمایش را جمع مستقیم [13]دو نمایش می خوانند. مسلم است که بااین کارهمواره می توان از نمایش های بابعد کوچک تر نمایش هایی با بعد بزرگترساخت. اما بهتراست که نمایش های این چنینی را ازنمایش هایی که اصالتاً بعد بزرگتری دارند جداکرد. به همین دلیل است که نمایش های کاهش ناپذیررا تعریف می کنیم .

تعریف نمایش های کاهش پذیر و کاهش ناپذیر: نمایش $D : G \longrightarrow V$ کاهش پذیر[14]است هرگاه بتوان فضای V را به صورت جمع مستقیم دوفضا نوشت ، $V = V_1 \oplus V_2$ به نحوی که به ازای هرو، $D(g)$ بردارهای V_1 را به V_1 و بردارهای V_2 را به V_2 بنگارد. معنای این حرف آن است که دریک پایه مناسب تمام $D(g)$ ها به صورت بلوکه قطری ِ(25) درمی آیند. ممکن است ظاهر اولیه $D(g)$ ها بلوکه قطری نباشد ولی بتوان با انتخاب پایه مناسب یعنی بایک تبدیل تشابهی آنهارا بلوکه قطری کرد. بنابراین نمایشی که نتوان درهیچ پایه ای آن را به صورت بلوکه قطری نوشت ، نمایش کاهش ناپذیر [15] خوانده می شود.

مثال: برای گروه دوری $Z_2 := \{e, a\}$ دونمایش یک بعدی می توانیم تعریف کنیم: نمایش ِ

$$D_0(e) = 1, \qquad D_0(a) = 1, \tag{26}$$

و نمایش ِ

Direct sum of representations[13]
Reducible[14]
Irreducible[15]

$$D_1(e) = 1, \qquad D_1(a) = -1. \tag{27}$$

هم چنین می توانیم یک نمایش دوبعدی به صورت زیرتعریف کنیم:

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

اما این نمایش یک نمایش کاهش پذیراست زیرا باتبدیل تشابهی

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

خوااهیم داشت:

$$SD_2(e)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad SD_2(a)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

که به این معناست که

$$D_2(g) = D_0(g) \oplus D_1(g) \quad \forall g. \tag{30}$$

۴ کاراکترهای یک نمایش

فرض کنید که D یک نمایش از گروه G است . کلاس های تزویجی این گروه را $C_1, C_2, \cdots C_K$ نمایش می دهیم. کاراکتر i ام نمایش D که آن را با χ_i نمایش می دهیم عبارت است از:

$$\chi_i := tr(D(g)) \quad g \in C_i \tag{31}$$

این که کاراکتر[16] به یک کلاس و نه به اعضای آن بستگی دارد به این دلیل است که هردوعضو یک کلاس تزویجی مثل $x, y \in C_i$ دررابطه $y = g^{-1}xg$ برای یک $g \in G$ صدق می کنند و

$$tr(D(y)) = tr(D(gxg^{-1})) = tr(D(g)D(x)D(g)^{-1}) = tr(D(x)). \tag{32}$$

Character[16]

دراین درس خواهیم دید که کاراکترهانقش مهمی درنظریه نمایش گروه های متناهی بازی می کنند.
دراین جا به یک قضیه مهم می پردازیم. این قضیه بیان می کند هرگاه فضای V یک ضرب داخلی باشد همواره نمایش یک گروه متناهی یکانی خواهد بود.
به عبارت بهتر بایک تغییرپایه مناسب تمام ماتریس های نمایش را می توان تبدیل به ماتریس های یکانی کرد.

قضیه:() : هر نمایش گروه متناهی با یک نمایش یکانی معادل است.

اثبات: فرض کنید که فضای V که نمایش روی آن تعریف شده است دارای ضرب داخلی $(,)$ باشد. نخست یک ضرب داخلی جدید تعریف می کنیم با نماد زیر:

$$\{x,y\} := \sum_g (D(g)x, D(g)y)$$

با این ضرب داخلی جدید خاصیت زیر برقراراست :

$$\{D(g)x, D(g)y\} = \{x,y\}$$

حال فرض کنید که e_i ها پایه متعامد نسبت به ضرب داخلی $(\ , \ )$ و f_i ها پایه متعامد نسبت به ضرب داخلی $\{ \ , \ \}$ باشند.
عملگر خطی S راچنان تعریف می کنیم که پایه $\{e_i\}$ را به پایه $\{f_i\}$ بنگارد:

$$Se_i = f_i$$

دراین صورت خواهیم داشت

$$\{Sx, Sy\} = \{S(x_ie_i), S(y_je_j)\} = x_iy_j\{f_i, \ f_j\} = x_iy_i = (x,y)$$

بنابراین یافتیم که برای هر x,y رابطه زیر برقرار است:

$$(x,y) = \{Sx, Sy\} \qquad \{x,y\} = (S^{-1}x, S^{-1}y)$$

حال کافی است که قرار دهیم : $\hat{D}(g) := S^{-1}D(g)S$.
با این تعریف خواهیم داشت :

$$(\hat{D}(g)x, \hat{D}(g)y) = (S^{-1}D(g)Sx, S^{-1}D(g)Sy)$$

$$= \{D(g)Sx, D(g)Sy\} = \{Sx, Sy\} = (x,y)$$

بنا براین نشان دادیم که نمایش $\hat{D}$ یکانی است.

یک قضیه ساده درمورد ماتریس ها: اگر ماتریس M با ماتریس یکانی U جابجا شود آنگاه ماتریس های هرمیتی

$$M_+ := M + M^\dagger \qquad , \qquad M_- := i(M - M^\dagger) \tag{33}$$

نیز با U جابجامی شود.

اثبات این قضیه به عهده خواننده است.

۵ لم های شور

تقریباً تمام نظریه نمایش گروه های متناهی بر مبنای دوقضیه یا لم از شور[17] بناشده است که اکنون به بیان واثبات آنها می پردازیم:

لم اول شور: اگر D نمایش کاهش ناپذیر یک گروه متناهی G باشد و یک ماتریس M با همه $D(g)$ ها جابجا شود آنگاه M حتما مضربی از ماتریس واحد است.

اثبات: ازقضیه (۴) می دانیم که نمایش D یکانی است . هم چنین ازقضیه قبلی می دانیم که ماتریس هرمیتی M_+ با همه $D(g)$ ها جابجا می شود:

$$[D(g), M_+] = 0 \quad \forall g \in G. \tag{34}$$

ازآنجا که ماتریس M_+ هرمیتی است ویژه بردارهای آن یک پایه برای فضای نمایش می سازند. داریم:

$$M_+|v_n^{(i)}\rangle = \lambda_n|v_n^{(i)}\rangle, \qquad i = 1, 2, \cdots q_n \tag{35}$$

که درآن i شاخصی است که واگنی ویژه مقدار را می شمارد و از یک تا q_n طی می شود. حال ازرابطه (34) نتیجه می گیریم که

$$M_+(D(g)|v_n^{(i)}\rangle) = D(g)(M_+|v_n^{(i)}\rangle) = D(g)(\lambda_n|v_n^{(i)}\rangle) = \lambda_n(D(g)|v_n^{(i)}\rangle) \quad i = 1, 2, \cdots q_n \tag{36}$$

[17] Schur's Lemma

این رابطه به این معناست که بردارهای $D(g)|v_n^{(i)}\rangle$ نیز درزیرفضای مربوط به ویژه مقدار λ_n قراردارند وبنابراین بسط آنها تنها شامل بردارهای پایه $|v_n^{(i)}\rangle$ است. درنتیجه هرکدام از ماتریس های $D(g)$ شکلی مثل زیردارند:

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & & & \\ & D_2(g) & & \\ & & D_3(g) & \\ & & & \cdots \end{bmatrix} \tag{37}$$

که درآن $D_1(g)$ یک ماتریس q_1 بعدی، $D_2(g)$ یک ماتریس q_2 بعدی است والی آخر. باید دقت کنیم که این وضعیت برای همه $D(g)$ ها و نه فقط یکی از آنها برقراراست. ازطرفی فرض کرده ایم که نمایش D کاهش ناپذیراست که به این معناست که ماتریس های $D(g)$ تنهایک بلوک قطری دارند ونه چند تا. اما این امربه این معناست که ماتریس M_+ تنها یک ویژه مقداردارد که درجه واگنی آن بابعد کل فضا برابراست واین چیزی نیست جزاینکه ماتریس M_+ متناسب با ماتریس واحد است. این استدلال را برای M_- نیز می توان تکرارکرد و ازآنجا نتیجه می گیریم که M متناسب با ماتریس واحد است.

لم دوم شور: اگر D و D' دو نمایش کاهش پذیر به ترتیب با ابعاد d و d' باشند و یک ماتریس $d\times d'$ بعدی M وجود داشته باشد که دررابطه

$$D(g)\ M\ =\ M\ D'(g) \quad \forall\ g\in G \tag{38}$$

صدق کند، دراین صورت اگر بعد های d و d' با هم متفاوت باشند، M برابر با صفر و اگر باهم مساوی باشند، M ماتریسی وارون پذیراست. به زبان دیگر این قضیه بیان می کند که رابطه‌ی 38 برای دو نمایش کاهش ناپذیر غیر هم بعد نمی تواند وجود داشته باشد (مگراینکه M را برابر با صفر قرار دهیم که دراین صورت به طور بدیهی این رابطه برقرار است. هم چنین اگر برای دو نمایش کاهش ناپذیر هم بعد این رابطه برقرار بود، آنگاه حتماً این دو نمایش معادلند. دقت کنید که این رابطه نمی گوید که در یک بعد نمی توانیم دو یا چند نمایش کاهش ناپذیر متفاوت داشته باشیم. در واقع برای بسیاری از گروه ها در یک بعد معین می توانیم نمایش های متعددی داشته باشیم که همه باهم غیرمعادل باشند. لم دوم شور می گوید که برای چنین نمایش هایی هرگز یک ماتریس مثل M پیدا نخواهیم کرد که رابطه بالا برقرارباشد.

اثبات: فضای برداری نمایش D را با V و بردارهای پایه V را با $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots |v_d\rangle\}$ نشان می دهیم. می دانیم که

$$D(g)|v_j\rangle = \sum_{k=1}^{d}(D(g))_{kj}|v_k\rangle. \tag{39}$$

حال بردارهای زیررا درهمان فضا تشکیل می دهیم:

$$|\psi_k\rangle = \sum_{j=1}^{d} M_{jk}|v_j\rangle, \quad k=1,2,\cdots d', \tag{40}$$

و S رازیرفضایی از V می گیریم که توسط این بردارها جاروب می شود.

روی هربردار $D(g)\,|\psi_k\rangle$ رااثر می دهیم :

$$\begin{aligned} D(g)|\psi_k\rangle &= \sum_{j=1}^{d} M_{jk} D(g)|v_j\rangle = \sum_{j,l=1}^{d} M_{jk}(D(g))_{lj}|v_l\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{d}(D(g)M)_{lk}|v_l\rangle = \sum_{l=1}^{d}(MD'(g))_{lk}|v_l\rangle \\ &= \sum_{l,i=1}^{d} M_{li}D'(g)_{ik}|v_l\rangle = \sum_{i=1}^{d} D'(g)_{ik}|\psi_i\rangle \end{aligned} \tag{41}$$

این رابطه نشان می دهد که اثر $D(g)$ روی هرکدام ازبردارهای زیرفضای S بازهم ترکیب خطی از بردارهای زیرفضای S است. بنابراین S یک زیرفضای ناوردا تحت نمایش D است. اما چون D یک نمایش کاهش ناپذیراست، این زیرفضا یا تهی است یا تمام V است. اگر S تهی باشد خواهیم داشت $|\psi_k\rangle = 0 \quad \forall\ k$ که نتیجه اش ان است که $M=0$. اما اگر S تمام V باشد دو حالت وجود دارد. یا بردارهای $\{|\psi_k\rangle\}$ مستقل خطی اند که درنتیجه آن $d=d'$ و $det(M)\neq 0$. یااینکه بردارهای $\{|\psi_k\rangle\}$ مستقل خطی نیستند. این حالت فقط درصورتی ممکن است که $d' > d$.

پس تاکنون بدست آوردیم که

$$M=0 \quad \text{یا} \quad (d'=d \;\; \text{و} \;\; det(M)\neq\ 0) \quad \text{یا} \quad d'>d.. \tag{42}$$

اما می توانیم رابطه (38) را به شکل زیربازنویسی می کنیم:

$$\tilde{D}'(g)M^t = M^t\tilde{D}(g), \tag{43}$$

که درآن $\tilde{D}(g) = ((D(g))^t)^{-1}$ وعلامت t به معنای ترانهاده است. اگر نمایش های D و D' کاهش ناپذیرباشند، نمایش های $\tilde{D}$ و $\tilde{D'}$ نیزکاهش ناپذیرند. حال استدلال بالا را تکرارمی کنیم ونتیجه می گیریم که

$$M=0 \quad \text{یا} \quad (d=d' \;\; \text{و} \;\; det(M)\neq 0) \quad \text{یا} \quad d>d'. \tag{44}$$

وجه مشترک نتایج (44) و (42) که بدست آورده ایم آن است که

$$M=0 \quad \text{یا} \quad (d=d', \quad \text{و} \quad det(M)\neq 0). \tag{45}$$

اثبات لم دوم شور دراینجا کامل می شود.

۶ استفاده از لم ها ی شور

دراینجا بهتراست برای تمامی این درس نمادگذاری خود را مشخص کنیم. تامل برسراین نامگذاری دراینجا فهم مطالب آینده درس را آسان خواهد کرد. این نامگذاری درجدول زیرآمده است.

(46)

N	تعداد نمایش های کاهش ناپذیر
K	تعداد کلاس های تزویجی
D^μ	نمایش کاهش ناپذیر μ
n^μ	بعد نمایش کاهش ناپذیر μ
C_i	کلا س تزویجی i
$\lvert C_i\rvert$	تعداد اعضای کلاس تزویجی i
χ_i	کاراکتر یک نمایش در کلاس i
χ_i^μ	کاراکتر نمایش کاهش ناپذیر μ برای کلاس i

حال از لم اول شور استفاده می کنیم و ماتریس زیرراتعریف می کنیم.

$$M_i^\nu := \sum_{x\in C_i} D^\nu(x) \tag{47}$$

براحتی ثابت می شود که این ماتریس دارای خاصیت زیر است:

$$M_i^\nu D^\nu(g) = D^\nu(g) M_i^\nu \tag{48}$$

اثبات این رابطه چنین است:

$$\begin{aligned} M_i^\nu D^\nu(g) &= \sum_{x\in C_i} D^\nu(x)D^\nu(g) = \sum_{x\in C_i} D^\nu(xg) = \sum_{x\in C_i} D^\nu(g)D^\nu(g^{-1}xg) \\ &= D^\nu(g)\sum_{x'\in C_i} D^\nu(x') = D^\nu(g)M_i^\nu. \end{aligned} \tag{49}$$

بنابراین بنابرلم اول شور این ماتریس متناسب با ماتریس واحد است. یعنی

$$M_i^\nu = A_i^\nu I \tag{50}$$

که درآن A_i^ν یک عدد ثابت است که باید محاسبه شود. برای محاسبه آن رد دوطرف را محاسبه می کنیم . نخست توجه می کنیم که

$$tr(M_i^\nu) = |C_i|\chi_i^\nu \tag{51}$$

باتوجه به این که دررابطه بالا $tr(I) = n^\nu$، بدست می آوریم که $A_i^\nu = \frac{|C_i|\chi_i^\nu}{n^\nu}$. درنتیجه خواهیم داشت :

$$\sum_{x\in C_i} D^\nu(x) = \frac{|C_i|\chi_i^\nu}{n^\nu} I \tag{52}$$

این رابطه یکی از روابط اساسی است که درآینده ازآن استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید که $D\mu$ و D^ν دو نمایش کاهش ناپذیر و X یک ماتریس دلخواه باشد تنها بااین شرط که ضرب ماتریسی زیر قابل تعریف باشد. ماتریس زیررادرنظرمی گیریم:

$$M := \sum_{g\in G} D^\nu(g) X D^\mu(g^{-1}), \tag{53}$$

براحتی ثابت می شود که این ماتریس دررابطه زیرصدق می کند:

$$M D^\mu(h) = D^\nu(h) M. \tag{54}$$

هرگاه $\mu = \nu$، بنابرلم اول شور بدست می آوریم که M متناسب با ماتریس واحد است وهرگاه که $\mu \neq \nu$ با توجه به آنکه این شاخص هارابرای نمایش های کاهش ناپذیرغیرمعادل بکارمی بریم نتیجه می گیریم که $M = 0$. بنابراین نتیجه می گیریم که

$$\sum_{g\in G} D^\nu(g) X D^\mu(g^{-1}) = \delta^{\mu\nu} C_\mu(X) I, \tag{55}$$

که درآن I ماتریس واحد و $C_\mu(X)$ عددی است که به ماتریس X بستگی دارد. برای اینکه ثابت $C_\mu(X)$ را به دست آوریم قرار می دهیم $\mu = \nu$ و از طرفین ردّ می گیریم:

$$|G| tr(X) = C_\mu(X) n^\mu, \qquad \longrightarrow \qquad C_\mu(X) = \frac{|G| tr(X)}{n^\mu}. \tag{56}$$

حال ماتریس X را برابربا E_{ij} می گیریم. درنتیجه رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{g\in G} D^{\nu}(g)E_{ij}D^{\mu}(g^{-1}) = \delta^{\mu\nu}\frac{|G|}{n^{\mu}}\delta_{ij}I, \tag{57}$$

و یا پس از محاسبه درایه‌ی mn از طرفین

$$\sum_{g\in G} D^{\nu}_{mi}(g){D^{\mu}}^{*}_{nj}(g) = \frac{|G|}{n_{\nu}}\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{mn}. \tag{58}$$

روابط (58) و (52) روابط اساسی ای هستند که نتایج مهم وجالبی از آنها استخراج خواهد شد و نظریه نمایش برمبنای این نتایج ساخته خواهد شد.

نتیجه ۱: به ازای هرسه شاخص m, i, ν یک بردار $|G|$ بعدی به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$|D^{\nu}_{mi}\rangle := \sqrt{\frac{n_{\nu}}{|G|}}\begin{pmatrix} D^{\nu}_{mi}(g_1), \\ D^{\nu}_{mi}(g_2), \\ \cdots \\ D^{\nu}_{mi}(g_{|G|}) \end{pmatrix}, \tag{59}$$

می توان از نمادگذاری دیراک استفاده کرد و به ازای هر عضو g گروه یک بردار برا به شکل $|g\rangle$ تعریف کرد. دراین صورت خواهیم داشت:

$$D^{\mu}_{ij}(g) = \langle g|D^{\mu}_{ij}\rangle. \tag{60}$$

رابطه (58) درواقع بیان می کند که تمام بردارهای ازنوع فوق برهم عمودند یعنی

$$\langle D^{\mu}_{nj}|D^{\nu}_{mi}\rangle = \delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{mn}. \tag{61}$$

ازآنجا که دریک فضای برداری تعداد بردارهای متعامد نمی تواندازبعد فضا بیشتر باشد نتیجه می گیریم که

$$\sum_{\nu} n_{\nu}^2 \leq |G|. \tag{62}$$

بنابراین یک قید مهم روی تعداد وهم چنین بعد نمایش های کاهش ناپذیریک گروه متناهی بدست می آوریم.

نتیجه ۲: دررابطه (58) قرارمی دهیم $i = m$ و $j = n$ و روی هردو شاخص i, j جمع می بندیم. بدست می آوریم:

$$\sum_{g\in G} tr(D^{\nu}(g))tr(D^{\mu}(g))^{*} = |G|\delta^{\mu\nu}, \tag{63}$$

یا

$$\sum_{i=1}^{K} |C_i|\chi_i^{\nu}\chi_i^{\mu *} = |G|\delta^{\mu\nu}. \tag{64}$$

حال اگر به ازای هر μ یک بردار K بعدی به شکل زیرتعریف کنیم

$$|\chi^{\nu}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|C_1|}\chi_1^{\nu} \\ \sqrt{|C_2|}\chi_2^{\nu} \\ \cdots \\ \sqrt{|C_K|}\chi_K^{\nu} \end{pmatrix}, \tag{65}$$

رابطه (64) بیان می کند که این بردارهانیز برهم عمودند یعنی

$$\langle\chi^{\mu}|\chi^{\nu}\rangle = \delta^{\mu,\nu}. \tag{66}$$

می توان بازهم از نمادگذاری دیراک استفاده کرد و به ازای هر کلاس C_i گروه یک بردار برا به شکل $|i\rangle$ تعریف کرد. دراین صورت خواهیم داشت:

$$\chi_i^{\mu} = \langle i|\chi^{\mu}\rangle. \tag{67}$$

ازآنجا که دریک فضای برداری تعداد بردارهای متعامد نمی تواند از بعد فضا بیشتر باشد، رابطه تعامد بالا لازم می دارد که تعداد نمایش های کاهش ناپذیراز تعداد کلاس های تزویجی کمتریامساوی باآن باشد یعنی

$$N \leq K. \tag{68}$$

نتیجه ۳ (طرز تجزیه یک نمایش به نمایش های کاهش ناپذیر): فرض کنید که نمایش کاهش پذیر D داده شده است. می خواهیم این نمایش را به نمایش های کاهش ناپذیرتجزیه کنیم. می نویسیم

$$D(g) = \bigoplus_{\mu=1}^{N} a_{\mu}D^{\mu}(g) \quad \forall \quad g \in G. \tag{69}$$

عبارت فوق بیان می کند که دریک پایه مناسب هرماتریس $D(g)$ به صورت بلوکه قطری درآمده است و a_μ نسخه ازهر ماتریس $D^\mu(g)$ روی بلوک های قطری خود دارد. اگر ردّ چنین ماتریسی رابرای یک $g \in C_i$ حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\chi_i = \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu \chi_i^\mu \tag{70}$$

ویا باضرب کردن هردوطرف در $\sqrt{\frac{|C_i|}{|G|}}$ ونوشتن همه مولفه ها به صورت برداری ازنوع (65)،

$$|\chi\rangle = \sum_\mu a_\mu |\chi^\mu\rangle. \tag{71}$$

حال ازرابطه تعامد بردارهای کاراکتر استفاده می کنیم و بدست می آوریم :

$$a_\mu = \langle \chi^\mu | \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_i |C|_i \chi_i \chi_i^{\mu *}. \tag{72}$$

بنابراین ضرایب بسط هرنمایش برحسب نمایش های کاهش ناپذیرازرابطه بالا بدست می آید.

این رابطه درعین حال ملاک مهمی برای کاهش ناپذیربودن یک نمایش به ماارایه می دهد. اگرنمایش داده شده خودیکی از نمایش های کاهش ناپذیر مثلاً نمایش D^μ باشد خواهیم داشت $a^\mu = 1$ و $a_{\nu \neq \mu} = 0$. بنابربه نتیجه زیرمی رسیم :

نتیجه ۴: یک نمایش کاهش ناپذیراست اگر وفقط اگر داشته باشیم:

$$\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = |G|. \tag{73}$$

برای ساختن بقیه نظریه نمایش می بایست به یک نمایش ویژه موسوم به نمایش منظم بپردازیم.

۷ نمایش منظم

برای هرگروه متناهی G یک نمایش یکتاکه آن را با D^R نشان می دهیم و بعد آن بامرتبه G یعنی $|G|$ برابراست، به شکل زیرتعریف می شود. V را فضای برداری ای می گیریم که بردارهای پایه متعامد آن متناظربا عناصرگروه هستند. این بردارهای پایه را با

$$\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, \cdots |g_{|G|}\rangle\}, \quad \langle g_i | g_j \rangle := \delta_{g_i, g_j} \tag{74}$$

نشان می دهیم. حال به ازای هر $g \in G$ $D^R(g)$ روی بردارهای پایه این فضا به شکل زیراثرمی کند:

$$D^R(g)|g'\rangle := |gg'\rangle, \quad \forall g, g' \in G. \tag{75}$$

براحتی معلوم می شود که D^R یک نمایش است زیرا:

$$D^R(g)D^R(h)|k\rangle = D^R(g)|hk\rangle = |g(hk)\rangle = |(gh)k\rangle = D^R(gh)|k\rangle. \tag{76}$$

کاراکترهای این نمایش براحتی قابل محاسبه اند. درواقع داریم

$$\begin{aligned} tr(D^R(h)) &= \sum_{g\in G}\langle g|D^R(h)|g\rangle = \sum_{g\in G}\langle g|hg\rangle = \sum_{g\in G}\delta_{g,hg} \\ &= \sum_{g\in G}\delta_{e,h} = |G|\delta_{e,h}. \end{aligned} \tag{77}$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $\chi^R(e) = |G|$ و $\chi^R(g\neq e) = 0 \quad \forall g\in G$.

این نمایش عموماً کاهش پذیراست ومی توان آن را به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه کرد

$$D^R(g) = \bigoplus_{\mu=1}^{N} a_\mu^R D^\mu(g) \quad \forall\ g\in G. \tag{78}$$

برای بدست آوردن ضرایب بسط کافی است ازرابطه (72) استفاده کنیم. بدست می آوریم:

$$a_\mu^R = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^R(g)\chi^\mu(g)^* = \frac{1}{|G|}|G|\chi^\mu(e)^* = n_\mu. \tag{79}$$

بنابراین درنمایش منظم یک گروه هرنمایش کاهش ناپذیر به تعداد بعد خود وارد می شود ورابطه (78) را می توان به صورت زیرنوشت:

$$D^R(g) = \bigoplus_{\mu=1}^{N} n_\mu D^\mu(g) \quad \forall\ g\in G, \tag{80}$$

و

$$\chi^R(g) = \sum_{\mu=1}^{N} n_\mu \chi^\mu(g). \tag{81}$$

نتیجه ۵:

هرگاه طرفین رابطه بالا را برای $g=e$ حساب کنیم بدست می آوریم:

$$|G| = \sum_{\mu=1}^{N} n_\mu^2. \tag{82}$$

بنابراین رابطه (62) دقیقاً به صورت یک تساوی برقرارمی شود. این امر به این معناست که بردارهای $|D_{ij}^\mu\rangle$ که در (59) تعریف شدند نه تنها متعامدند بلکه بدلیل آن که تعداد آنها با بعدشان برابراست کامل نیزهستند. یعنی

$$\sum_{ij;\mu} |D_{ij}^\mu\rangle\langle D_{ij}^\mu| = I \tag{83}$$

و یاباضرب طرفین در $|g\rangle$ و $\langle g'|$:

$$\sum_{ij;\mu} \langle g|D^{\mu}_{ij}\rangle\langle D^{\mu}_{ij}|g'\rangle = \delta_{g,g'}, \tag{84}$$

ویا

$$\sum_{ij;\mu} \frac{n^{\mu}}{|G|} D^{\mu}_{ij}(g) D^{\mu}_{ij}(g')^* = \delta_{g,g'}. \tag{85}$$

ازاین رابطه می توانیم یک رابطه کامل بودن برای کاراکتر ها نیز بدست آوریم. برای این کار طرفین این رابطه راروی $g \in C_l$ و $g' \in C_{l'}$ که درآن C_l و $C_{l'}$ جمع می زنیم. بدست می آوریم:

$$\sum_{ij;\mu} \frac{n^{\mu}}{|G|} \left(\sum_{g\in C_l} D^{\mu}_{ij}(g)\right) \left(\sum_{g'\in C_{l'}} D^{\mu}_{ij}(g')^*\right) = \sum_{g\in C_l} \sum_{g'\in C_{l'}} \delta_{g,g'} \tag{86}$$

دراینجا می توانیم از رابطه (52) استفاده کنیم و رابطه بالا را تبدیل کنیم به

$$\sum_{ij;\mu} \frac{n^{\mu}}{|G|} \frac{|C_l|}{n_{\mu}} \chi^{\mu}_l \delta_{ij} \frac{|C_{l'}|}{n_{\mu}} \chi^{\mu *}_{l'} \delta_{ij} = \delta_{l,l'}|C_l|. \tag{87}$$

پس از ساده کردن این رابطه به شکل نهایی زیردرمی آید:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \chi^{\mu}_l \chi^{\mu *}_{l'} = \delta_{l,l'} \frac{|G|}{|C_l|}. \tag{88}$$

این رابطه به این معناست که بردار های $|\chi^{\mu}\rangle$ که قبلاً تعریف کردیم نه تنهابرهم عمودند بلکه یک پایه کامل نیز تشکیل می دهند، یعنی رابطه زیربرقراراست:

$$\sum_{\mu=1}^{N} |\chi^{\mu}\rangle\langle\chi^{\mu}| = I. \tag{89}$$

. بنابراین رابطه $N \leq K$ که قبلاً بدست آورده بودیم به صورت یک تساوی برقراراست یعنی

$$N = K. \tag{90}$$

یعنی تعدادنمایش های کاهش ناپذیریک گروه متناهی دقیقاً با تعداد کلاس های تزویجی آن گروه برابراست.

۸ خلاصه

دراین بخش روابطی را که بدست آورده ایم برای راحتی استفاده های بعدی یکجا گردآوری می کنیم:

$$N = K \tag{91}$$

$$\sum_{\mu=1}^{N}(n^\mu)^2 = |G| \tag{92}$$

$$\sum_{\mu=1}^{N}|\chi^\mu\rangle\langle\chi^\mu| = I \tag{93}$$

$$\langle\chi^\mu|\chi^\nu\rangle = \delta^{\mu,\nu} \tag{94}$$

$$\sum_{ij;\mu}|D^\mu_{ij}\rangle\langle D^\mu_{ij}| = I \tag{95}$$

$$\langle D^\mu_{ij}|D^\nu_{kl}\rangle = \delta^{\mu\nu}\delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{96}$$

که درآن ها

$$|\chi^\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\begin{pmatrix}\sqrt{|C_1|}\chi^\nu_1\\ \sqrt{|C_2|}\chi^\nu_2\\ \cdots\\ \sqrt{|C_K|}\chi^\nu_K\end{pmatrix}, \qquad |D^\nu_{mi}\rangle := \sqrt{\frac{n_\nu}{|G|}}\begin{pmatrix}D^\nu_{mi}(g_1),\\ D^\nu_{mi}(g_2),\\ \cdots\\ D^\nu_{mi}(g_{|G|})\end{pmatrix}. \tag{97}$$

و

۹ کاربردها ومثال ها

دراین بخش ازروابط کلی ای که بدست آوردیم استفاده می کنیم و روش بدست آوردن نمایش های گروه های متناهی را باذکرچند مثال شرح می دهیم. درحالت کلی بدست آوردن نمایش یک گروه اگرچه سرراست است ولی کارطولانی و وقت گیری است ومی بایست محاسبات آن را باحوصله وصرف وقت انجام داد.

مثال ۱: فرض کنید که G یک گروه آبلی باشد . دراین صورت می دانیم که همه کلاس های تزویجی آن یک عضوی هستند، بنابراین $K = |G|$. باتوجه به رابطه اول و دوم از (91) بدست می آوریم که $N = |G|$ و برای همه μ ها $n^\mu = 1$. یعنی

یک گروه آبلی تمام نمایش های کاهش ناپذیرش یک بعدی هستند.

مثال ۲: فرض کنید که G یک گروه دوری $G = \{e, a, a^2, \cdots a^{n-1}\}$ است. کافی است که نمایش مولد آن یعنی a را بدست آوریم. ازمثال قبل می دانیم که تمام نمایش ها یک بعدی هستند. یک نمایش D درنظربگیرید. می بایست شرط

$$(D(a))^n = 1 \tag{98}$$

برقرارباشد. این معادله n تا حل دارد که هرکدام یک نمایش را تعریف می کند

$$D^\mu(a) = e^{\frac{2\pi i \mu}{n}} \quad \mu = 0, 1, \cdots n-1. \tag{99}$$

بنابراین

$$D^\mu(a^k) = e^{\frac{2\pi i \mu k}{n}} \quad \mu = 0, 1, \cdots n-1. \tag{100}$$

مثال ۳: گروه S_3: گروه جایگشت های سه شیء یا S_3 دارای دو مولد است که آنهارابا σ_1 و σ_2 نشان می دهیم. داریم:

$$S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}. \tag{101}$$

بااستفاده ازروابطی که بین مولد ها برقراراست کلاس های تزویجی S_3 به شکل زیرخواهند بود:

$$C_0 = \{e\}, \quad C_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}, \quad C_2 = \{\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\}. \tag{102}$$

بنابراین برای این گروه داریم $N = K = 3$. یعنی سه نمایش کاهش ناپذیرداریم. یک نمایش یک بعدی همان نمایش بدیهی است:

$$D^0(g) = 1 \quad \forall\, g \in S_3. \tag{103}$$

نمایش یک بعدی دیگر آن است که به جایگشت های زوج عدد ۱+ و به جایگشت های فرد عدد ۱− نسبت می دهد:

$$\begin{aligned} &D^1(e) = D^1(\sigma_1\sigma_2) = D^1(\sigma_2\sigma_1) = 1 \\ &D^1(\sigma_1) = D^1(\sigma_2) = D^1(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = -1. \end{aligned} \tag{104}$$

ازرابطه $6 = (n^0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2$ نتیجه می شود که تنهایک نمایش دوبعدی دیگروجوددارد. دراین نمایش کافی است که بتوانیم به مولدهای σ_1 و σ_2 ماتریس های دوبعدی نسبت دهیم که درروابط ضرب گروه صدق کنند. می دانیم که

$$D^2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{105}$$

نایه ای انتخاب می کنیم که درآن نمایش σ_1 قطری باشد. ازآنجا که $\sigma_1^2 = e$، ویژه مقدارهای $D^2(\sigma_1)$ یک ومنهای یک خواهند بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$D^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{106}$$

حال باقی می ماند نمایش σ_2. ماتریس $D^2(\sigma_2)$ می بایست یکانی باشد. ویژه مقدارهای آن نیز ± 1 است، پس دترمینان آن -1 است. یک چنین ماتریسی شکل استاندارد زیررادارد:

$$D^2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a^* \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{107}$$

شرط $(D^2(\sigma_2))^2 = I$ منجر به حقیقی بودن a می شود.
حال ازرابطه بین مولدها استفاده می کنیم. می دانیم که $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$. درنتیجه می بایست داشته باشیم

$$D^2(\sigma_1)D^2(\sigma_2)D^2(\sigma_1) = D^2(\sigma_2)D^2(\sigma_1)D^2(\sigma_2). \tag{108}$$

این شرط منجر به مقادیرزیر می شود: $a = \frac{-1}{2}$ و $|b|^2 = \frac{3}{4}$. بنابراین خواهیم داشت

$$D^2(\sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3}e^{i\phi} \\ \sqrt{3}e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}, \tag{109}$$

که درآن ϕ یک پارامترآزاد است. این پارامتررا همواره می توان باتبدیل تشابهی مناسب حذف کرد. یافتن این تبدیل را به عهده خواننده می گذاریم. نهایتاً نمایش D^2 به شکل زیراست:

$$D^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D^2(\sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \tag{110}$$

مثال ۴: درمثال هایی که حل کردیم استفاده چندانی از روابط تعامد نکردیم. دراین مثال بازهم گروه S_3 را درنظرمی گیریم ولی این بار بعدازملاحظات ساده کننده ازروابط تعامد استفاده می کنیم.

نخست کلاس های تزویجی گروه S_3 را درنظرمی گیریم. این کلاس هاعبارتند از:

$$C_0 = \{e\}, \qquad C_1 = \{\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\}, \qquad C_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}. \tag{111}$$

می دانیم که این گروه دو نمایش کاهش ناپذیریک بعدی و یک نمایش کاهش ناپذیر دوبعدی دارد. این نمایش هارا با D^1 ، $D^{1'}$ و D^2 نشان می دهیم. باتوجه به رابطه (97) و اینکه $|C_0| = 1, \quad |C_1| = 2, \quad |C_2| = 3$ بردارهای کاراکتر فرم کلی زیررادارند:

$$|\chi^\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \chi_0^\mu \\ \sqrt{2}\chi_1^\mu \\ \sqrt{3}\chi_2^\mu \end{pmatrix} \tag{112}$$

می دانیم که $\chi_0^2 = 2$. ضمناً می دانیم که درنمایش D^1 به همه عناصرگروه عدد یک و درنمایش $D^{1'}$ به عناصرزوج عدد یک وبه عناصر فرد عدد منهای یک نسبت داده می شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$|\chi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad |\chi^{1'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad |\chi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{3}\beta \end{pmatrix} \tag{113}$$

که درآن α و β پارامترهای مجهولی هستند که باید محاسبه شوند. از شرط تعامد بردارهای فوق بلافاصله بدست می آوریم که

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 0, \tag{114}$$

یعنی

$$\chi_1^2 = -1 \qquad \chi_2^2 = 0 \tag{115}$$

حال نمایش دوبعدی را درنظرمی گیریم. هدف مایافتن $D^2(\sigma_1)$ و $D^2(\sigma_2)$ است. زیرابقیه عناصرازاین ماتریس ها بدست می آیند. می دانیم که $D^2(\sigma_1)$ را قطری کنیم و باتوجه به اینکه مربع ماتریس $D^2(\sigma_1)$ برابربا ماتریس واحد است این ماتریس دارای دو ویژه مقدار 1 و -1 است. پس قرارمی دهیم

$$D^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \qquad D^2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{116}$$

که درآن پارامترهای $a, \ b, \ c, \ d$ می بایست محاسبه شوند. ازاین رابطه نمایش بقیه عناصریافته خواهد شد:

$$D^2(\sigma_1\sigma_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}, \qquad D^2(\sigma_2\sigma_1) = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}, \qquad D^2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}. \tag{117}$$

حال ازرابطه (115) استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned}
&\sigma_2 \in C_2, \quad \chi_2^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad a + d = 0 \\
&\sigma_1\sigma_2 \in C_1, \quad \chi_2^2 = -1 \quad \longrightarrow \quad a - d = -1
\end{aligned} \tag{118}$$

که ازآن بدست می آوریم

$$a = \frac{-1}{2}, \qquad d = \frac{1}{2}. \tag{119}$$

حال بااستفاده از روابطه بالا و رابطه (97) با ترتیب

$$g_1 = e, \quad g_2 = \sigma_1, \quad g_3 = \sigma_2 \quad g_4 = \sigma_1\sigma_2, \quad g_5 = \sigma_2\sigma_1, \quad g_6 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1, \tag{120}$$

بدست می آوریم:

$$|D^1_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |D^{1'}_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{121}$$

و

$$|D^2_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \quad |D^2_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ b \\ -b \\ -b \end{pmatrix}, \quad |D^2_{21}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ -c \\ c \\ -c \end{pmatrix}, \quad |D^{1'}_{22}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{122}$$

حال از شرط $\langle D^2_{12}|D^2_{12}\rangle = 1$ و $\langle D^2_{21}|D^2_{21}\rangle = 1$ استفاده می کنیم و بدست می آوریم

$$|b|^2 = |c|^2 = \frac{3}{4}. \tag{123}$$

درنتیجه با توجه به هرمیتی بودن $D^2(\sigma_2)$ که درمثال ۳ توضیح داده شد خواهیم داشت :

$$D^2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\theta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{124}$$

فاز $e^{i\theta}$ را نیز می توان بایک تبدیل تشابهی حذف کرد.
درمثال های پیچیده تراستفاده از این روابط کاریافتن نمایش را بخصوص باتوجه به امکان استفاده ازرایانه برای حل این معادلات برای گروه های بزرگ، آسان خواهد کرد.

۱۰ نمایش روی فضای توابع

فرض کنید که گروه G روی یک مجموعه M عمل کند. (برای یادآوری عمل گروه روی یک مجموعه به درس چهارم رجوع کنید.) می توانیم به ازای هرنقطه از M یک بردار $|x\rangle$ تعریف کنیم. و فضای برداری V فضایی می گیریم که توسط مجموعه بردارهای $\{|x\rangle, \quad x\in M\}$ جاروب می شود. درحالتی که M یک مجموعه گسسته باشد این بردارها را با رابطه $\langle x|x'\rangle = \delta_{x,x'}$ م و درحالتی که M یک مجموعه پیوسته باشد این بردارها را بارابطه $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ بهنجارمی کنیم. حال می توانیم یک نمایش روی فضای V به شکل زیرتعریف کنیم:

$$U(g)|x\rangle := |gx\rangle. \tag{125}$$

واضح است که U یک نمایش است. هربردار روی فضای برداری V را می توان به صورت زیربسط داد:

$$|\psi\rangle = \sum_{x\in M}\psi(x)|x\rangle, \tag{126}$$

برای حالت گسسته و

$$|\psi\rangle = \int dx\psi(x)|x\rangle \tag{127}$$

که درحالت اخیرفرض کرده ایم که dx یک اندازه مناسب برای انتگرال گیری روی M است. $\psi: M \longrightarrow C$ تابعی روی M خواهد که مقادیرخود را درحوزه اعداد مختلط می گیرد. ازشرط تعامد و کامل بودن پایه بدست می آوریم که

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle. \tag{128}$$

حال ازرابطه (125) بدست می آوریم

$$\langle x|U(g)^\dagger = \langle gx|, \tag{129}$$

که باتوجه به یکانی بودن نمایش خواهد شد:

$$\langle x|U(g^{-1}) = \langle gx|, \tag{130}$$

ویا

$$\langle x|U(g) = \langle g^{-1}x|. \tag{131}$$

هرگاه عملگر $U(g)$ را روی یک برداردلخواه $|\psi\rangle$ درفضای V اثردهیم بردارجدیدی مثل $|\psi'\rangle$ بدست خواهد آمد:

$$|\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle, \tag{132}$$

وازآنجا

$$\langle x|\psi'\rangle = \langle x|U(g)|\psi\rangle. \tag{133}$$

اماباتوجه به رابطه (131) این امربه این معناست که

$$\psi'(x) = \psi(g^{-1}x). \tag{134}$$

بنابراین عملگر U یک نمایش روی توابع مختلط تعریف شده روی M که آن رابا $F(M)$ نشان می دهیم، تعریف می کند. این نمایش به شکل زیرعمل می کند:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) := \psi(g^{-1}x). \tag{135}$$

می توانیم ψ' را با $U(g)\psi$ نشان دهیم که دراین صورت عبارت بالا به شکل زیردرمی آید:

$$(U(g)\psi)(x) := \psi(g^{-1})(x). \tag{136}$$

می توان ازابتدا نمایش روی توابع را به این شکل تعریف کرد واین کاری است که دربعضی از متون انجام می شود.

درحالت کلی نمایشی که به این صورت روی V یا روی فضای توابع تعریف شده روی M بوجود می آید یک نمایش کاهش ناپذیراست، اما می توان فضای V را به زیرفضاهای ناوردا تجزیه کرد که به این معناست که نمایش U به نمایش های کاهش ناپذیرتجزیه می شود.

مثال ۱: گروه $Z_n = \{e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ را درنظربگیریم. این گروه روی صفحه مختلط C به شکل زیرعمل می کند:

$$a : z \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{n}} z, \tag{137}$$

که ازنظرشهودی به این معناست که هرنقطه را به اندازه زوایه $\frac{2\pi}{n}$ می چرخاند. با توجه به آنچه که گفتیم، نمایش این گروه روی فضای توابع صفحه مختلط به شکل زیرتعریف می شود:

$$(U(a)\psi)(z) = \psi(a^{-1}z) = \psi(e^{\frac{2\pi i}{n}} z). \tag{138}$$

این نمایش یک نمایش بی نهایت بعدی است. ازطرفی می دانیم که Z_n ، n تا نمایش کاهش ناپذیر دارد که همه یک بعدی هستند. هرنمایش بایک عدد $r \in \{0, 1, 2, \cdots n-1\}$ مشخص می شود ودرنمایش r عنصر a باعدد $e^{\frac{2\pi i r}{n}}$ نمایش داده می شود. این امربه این معناست که فضای تمام توابع مختلط یعنی $F(C)$ می بایست به فضاهای یک بعدی تجزیه شود که هرکدام یک نمایش یک بعدی r از گروه Z_n را حمل کند:

$$F(C) = \bigoplus_r a_r F^r(C) \tag{139}$$

که درآن a_r چندگانگی نمایش کاهش ناپذیر D^r است که روی فضای $F^r(C)$ تعریف شده است. دقت کنید که هرکدام ازفضاهای F^r یک بعدی است وتنهاتوسط یک تابع که آن را با ψ_r نشان می دهیم جاروب می شود. این تابع بنابر رابطه (138) درشرط زیرصدق می کند:

$$\psi_r(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = e^{\frac{2\pi i r}{n}} \psi_r(z), \tag{140}$$

که ازآن بدست می آوریم:

$$\psi_r(z) = z^{-r}, \quad r = 0, 1, 2, \cdots n-1. \tag{141}$$

دقت کنید که درحالت کلی داریم $\psi_r(z) = z^{kn-r}$ که درآن k یک عدد صحیح دلخواه است. این آزادی درواقع بیان می کند که چندگانگی هرنمایش کاهش ناپذیر درتجزیه نمایش U روی فضای توابع مختلط بی نهایت است و عدد صحیح k این چندگانگی را مشخص می کند.

مثال ۲: گروه $S_2 = \{I, \sigma\}$ وعمل آن روی R را که به شکل زیرتعریف می شود درنظربگیرید:

$$I\ x = x, \qquad \sigma\ x = -x. \tag{142}$$

بنابراین روی $F(R)$ یک نمایش برای S_2 به شکل زیرتعریف می شود:

$$(U(I)f)(x) = f(x), \qquad (U(\sigma)f)(x) = f(-x). \tag{143}$$

این نمایش یک نمایش بی نهایت بعدی است. ازطرفی S_2 تنها دونمایش کاهش ناپذیردارد که هردویک بعدی اند.

$$D^0(I) = D^0(\sigma) = 1, \qquad D^1(I) = 1, \quad D^1(\sigma) = -1. \tag{144}$$

پس فضای بی نهایت بعدی $F(R)$ می بایست به زیرفضاهای یک بعدی که این دونمایش را حمل می کنند تجزیه شود یعنی

$$U = a_0 D^0 \oplus a_1 D^1, \tag{145}$$

که درآن a_0 و a_1 چندگانگی این نمایش ها هستند. ازآنجا که این نمایش ها هردو یک بعدی اند، باتوجه به رابطه (149) می بایست به دنبال توابعی باشیم که تحت عمل $U(\sigma)$ به ضریبی از خودشان تبدیل شوند . این امر به معنای آن است که F^0 شامل توابع زوج و F^1 شامل توابع فرداست. مجموعه توابع زوج یا فرد زیرفضاهای بی نهایت بعدی از $F(R)$ هستند. بنابراین بامعرفی فضای تک جمله‌ای های درجه n به صورت

$$F_n(R) := \{f : R \longrightarrow R | f(x) = \alpha x^n\} \tag{146}$$

درمی یابیم که $F(R)$ به صورت زیرتجزیه می شود:

$$F(R) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} F_n(R), \tag{147}$$

که درآن F_n برای n های زوج نمایش D^0 و برای n های فرد نمایش D^1 راحمل می کنند.

مثال ۳: گروه S_3 با مولدهای σ_1 و σ_2 روی مجموعه $R \times R \times R$ به شکل زیرعمل می کند:

$$\sigma_1(x, y, z) = (y, x, z) \qquad \sigma_2(x, y, z) = (x, z, y). \tag{148}$$

بنابراین روی $F(R \times R \times R)$ یعنی روی فضای توابع سه متغیره یک نمایش برای S_3 به شکل زیرتعریف می شود:

$$(U(\sigma_1)f)(x, y, z) = f(y, x, z), \qquad (U(\sigma_2)f)(x, y, z) = f(x, z, y). \tag{149}$$

این نمایش یک نمایش بی نهایت بعدی است. ازطرفی S_3 تنها سه نمایش کاهش ناپذیردارد که دو تایک بعدی و سومی دوبعدی است که آن ها را با D^1 ، $D^{1'}$ و D^2 نشان می دهیم. درنتیجه می بایست داشته باشیم

$$F(R \times R \times R) = \bigoplus (F^1(R \times R \times R) \oplus F^{1'}(R \times R \times R) \oplus F^2(R \times R \times R)) \tag{150}$$

درنتیجه باتوجه به شناختی که ازنمایش های کاهش ناپذیرداریم، برای $f \in F^1(R \times R \times R)$ می بایست داشته باشیم:

$$f(y, x, z) = f(x, y, z), \qquad f(x, z, y) = f(x, y, z). \tag{151}$$

هم چنین برای هر $g \in F^{1'}(R \times R \times R)$ داریم :

$$g(y,x,z) = -g(x,y,z), \qquad g(x,z,y) = -g(x,y,z). \tag{152}$$

وبالاخره ازانجا که هرکدام از زیرفضاهای $F^2(R \times R \times R)$ یک زیرفضای دوبعدی است درهرکدام می بایست دوتابع ϕ_1 و ϕ_2 داشته باشیم که باتوجه به روابط () و () مطابق روابط زیربه هم تبدیل شوند:

$$\begin{aligned} \phi_1(y,x,z) &= \phi_1(x,y,z) \\ \phi_2(x,z,y) &= -\phi_2(x,y,z), \end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x,z,y) &= \frac{-1}{2}\phi_1(x,y,z) + \frac{\sqrt{3}}{2}\phi_2(x,y,z) \\ \phi_2(x,z,y) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\phi_1(x,y,z) + \frac{1}{2}\phi_2(x,y,z). \end{aligned} \tag{154}$$

دراین جا هدف ما آن نیست که این تجزیه را به صورت کامل انجام دهیم. امابد نیست که مثال هایی ازتوابع فوق یعنی توابعی که تحت نمایش های مشخص به یکدیگر تبدیل می شوند ارائه دهیم. این مثال ها با سعی وخطا یافته شده اند. خواننده را تشویق می کنیم که سعی کند بااستفاده از این مثال ها تجزیه فضای توابع $F(R \times R \times R)$ را به طورکامل انجام دهد. این مثال ها به ترتیب زیرهستند:

الف: مثال هایی برای تابع f که تحت نمایش D^1 تبدیل می شود:

الف – ۱:

$$f(x,y,z) = u(x)u(y)u(z), \tag{155}$$

که درآن u یک تابع یک متغیره دلخواه است.

الف – ۲:

$$f(x,y,z) = u(x) \ + \ u(y) \ + \ u(z). \tag{156}$$

الف –۳:

$$f(x,y,z) = u(x)v(y)w(z)+u(y)v(x)w(z)+u(x)v(z)w(y)+u(z)v(y)w(x)+u(y)v(z)w(x)+u(z)v(x)w(y) \tag{157}$$

که درآن u,v,w توابع دلخواه یک متغیره هستند.

دقت کنید که مثال های الف —۱ و الف—۲، حالت های خاصی از مثال ۲ هستند.

ب: مثالهایی برای تابع g که تحت نمایش $D^{1'}$ تبدیل می شود:
ب—۱:

$$g(x,y,z) = (u(x)-u(y))(u(y)-u(z))(u(x)-u(z)), \qquad (158)$$

که درآن u یک تابع یک متغیره دلخواه است.

ب —۲:

$$f(x,y,z) = u(x)v(y)w(z) - u(y)v(x)w(z) - u(x)v(z)w(y) - u(z)v(y)w(x) + u(y)v(z)w(x) + u(z)v(x)w(y) \qquad (159)$$

که درآن u,v,w توابع دلخواه یک متغیره هستند.
دقت کنید که مثال ب—۱ حالت خاصی از مثال ب—۲ نیست.

ج: مثالی از دوتابع سه متغیره که تحت نمایش کاهش ناپذیرگروه S_3 تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y,z) &= u(x)+u(y)-2u(z) \\ \phi_2(x,y,z) &= \sqrt{3}(u(x)-u(y)), \end{aligned} \qquad (160)$$

که درآن u یک تابع یک متغیره دلخواه است. اگر قراردهیم $u(x)=x$، خواهیم داشت:

$$\phi_1(x,y,z) = x+y-2z, \phi_2(x,y,z) = \sqrt{3}(x-y). \qquad (161)$$

۱۱ نمایش گروه های لی

تا کنون بحث خود را به گروه های متناهی محدود کرده‌ایم. در یکی از مثال ها یعنی مثالِ مربوط به گروه جایگشت های سه تایی یا S_3 دیدیم که تنها کافی است که نمایش دو عنصر σ_1 و σ_2 را پیدا کنیم زیرا نمایش بقیه عناصر از روی نمایش این مولد

ها بدست می آید. این امر در مورد هرگروهی صادق است. زیرا اگر به عنوان مثال $\{g_1, g_2, \cdots g_K\}$ مولد های یک گروه G باشند، آنگاه نمایش عنصری مثل $g_1^{s_1} g_2^{s_2} \cdots g_K^{s_K}$ که درآن s_i ها اعداد صحیح مثبت یا منفی هستند براحتی از روی نمایش مولدها بدست می آید:

$$D(g) = D(g_1^{s_1} g_2^{s_2} \cdots g_K^{s_K}) = D(g_1)^{s_1} D(g_2)^{s_2} \cdots D(g_K)^{s_K}. \tag{162}$$

اکنون می توانیم به اختصار شرح دهیم که نمایش گروه های لی چگونه از روی نمایش مولدها بدست می آید. همینطور می توانیم نشان دهیم که چگونه از روی نمایش گروه می توان نمایش جبر را بدست آورد.

می دانیم که عناصر یک گروه لی G را همواره می توان به صورت نمای عناصر جبرلی آن نوشت به این معنا که به ازای هر $g \in G$ داریم

$$g = g(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_K) = e^{\theta^i T_i} \tag{163}$$

که در نوشتن آن از قرارداد جمع روی شاخص های تکراری استفاده کرده‌ایم. در این رابطه $g \in G$ عنصر گروه لی و T_i ها بردارهای پایه جبرلی یا به اصطلاح مولدهای جبر لی هستند. θ^i ها نیز پارامترهای موضعی گروه هستند که مقدارشان یک عنصر گروه مثل g را مشخص می کنند. نکته مهم دراین رابطه آن است که T_i ها یک فضای خطی را می سازند و این خطی بودن باعث سادگی بسیار زیاد جبر لی نسبت به گروه لی می شود. در عین حال این رابطه ما را قادر می سازد که ساختمان گروه و هم چنین نمایش های آن را از روی ساختمان جبر و نمایش های آن بدست آوریم. رابطه‌ای که مولدها در آن صدق می کنند به صورت زیراست

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k, \tag{164}$$

و دراین رابطه هیچ نوع اشاره ای به پارامترهای θ^i وجود ندارد. حال نمایش پیدا کردن برای یک جبر به این معناست که ماتریس هایی پیدا کنیم که درهمین رابطه جابجایی صدق کنند. به عبارت دیگر منظور از نمایش آن است که به هر عنصری از جبر مثل T_i یک ماتریس یا عملگر نسبت بدهیم مثل $D(T_i)$ به قسمی که

$$[D(T_i), D(T_j)] = D([T_i, T_j]) \tag{165}$$

که درآن منظور از $[D(T_i), D(T_j)] = D(T_i)D(T_j) - D(T_j)D(T_i)$ است. هرگاه یک نمایش مثل D برای جبر بسازیم، می توانیم با استفاده از آن یک نمایش برای گروه به شکل زیر بسازیم:

$$D(g) = D(g(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_K)) = e^{\theta^i D(T_i)}. \tag{166}$$

بعد نمایش گروه و جبر نیز یکسان خواهد بود. هرگاه نمایش D برای گروه یکانی باشد برای جبر پاد هرمیتی است. یعنی $D(T)^\dagger = -D(T)$. بالعکس هرگاه یک نمایش برای گروه بسازیم می توانیم یک نمایش برای مولد ها بدست آوریم. برای این کار کافی است که به بسط تابع نمایی توجه کنیم که بر مبنای آن

$$D(g) = I + \theta^i D(T_i) + \cdots, \tag{167}$$

و درنتیجه

$$D(T_i) = \frac{\partial}{\partial \theta^i} D(g(\theta_1, \cdots \theta_K)) \mid_{\theta=0} . \tag{168}$$

در بعضی از موارد ممکن است که خود جبر لی به صورت یک جبر ماتریسی تعریف شده باشد. دراین صورت ممکن است سوال کنید که اگر T_i خود ماتریس هستند چه نیازی به یافتن نمایش ماتریسی برای آنهاست؟ پاسخ این است که ممکن است ماتریس های دیگری بابعدهای متفاوت وجود داشته باشد به قسمی که همان رابطه جابجایی را بین ماتریس های اولیه داشته باشند. دراین صورت تمام این ماتریس های جدید نمایش های متفاوتی برای مولدها خواهند بود.

۱.۱۱ نمایش های گروه دوران

با توجه به اهمیتی که گروه دوران به عنوان یک گروه تقارن در فیزیک دارد، دراین جا نمایش های گروه دوران را به اختصار بررسی می کنیم. در این بررسی از آنچه که در درس مکانیک کوانتومی آموخته‌ایم استفاده می کنیم. می دانیم که یک عضو گروه دوران به صورت زیر نوشته می شود:

$$R_n(\theta) = e^{-i\theta n\cdot J} \tag{169}$$

که در آن $\mathbf{n}$ محور دوران، θ راویه دوران و $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ مولد های دوران هستند که در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= iJ_z, \\ [J_y, J_z] &= iJ_x, \\ [J_z, J_x] &= iJ_y. \end{aligned} \tag{170}$$

خواننده در درس مکانیک کوانتومی دیده است که برای جبر قوق بی نهایت نمایش کاهش ناپذیر وجود دارد که هر کدام با یک عدد صحیح یا نیمه صحیح j مشخص می شوند. هرنمایش با برچسب j، یک نمایش اسپین j خوانده می شود و بعد

$2j+1$ دارد. این نمایش را با D_j نشان می دهیم. بردارهای پایه فضای چنین نمایشی عبارتند از $\{|j,m\rangle, \quad -j\leq m\leq j\}$ و اثر عملگرهای $D_j(J_z)$، $D_j(J_\pm) := D_j(J_x)\pm iD_j(J_y)$ روی این بردارها به صورت زیراست:

$$\begin{aligned} D_j(J_z)|j,m\rangle &= m|j,m\rangle \\ D_j(J_+)|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1\rangle \\ D_j(J_-)|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle. \end{aligned} \tag{171}$$

به ازای هر نمایش اسپین j از جبر یک نمایش کاهش ناپذیرِ اسپین j برای گروه وجود دارد که عبارت است از

$$D_j(R_n(\theta)) = e^{-i\theta n\cdot D_j(J)} \tag{172}$$

به این ترتیب نمایش اسپین j برای عنصر گروه دوران بدست می آید. این نمایش $2j+1$ بعدی است.

حال جهت عکس را طی می کنیم و از یک نمایش برای گروه یک نمایش برای جبر بدست می آوریم. نمایشی که برای گروه در نظر می گیریم نمایش بی نهایت بعدی روی فضای توابع روی کره است. یک عنصر گروه دوران مثل $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ را در نظر می گیریم. می دانیم که گروه دوران روی کره دوبعدی عمل می کند و هر بردارِ $\mathbf{r}$ را تبدیل می کند به یک بردار دیگر روی کره مثل $\mathbf{r}'$:

$$r \longrightarrow r' = R_n(\theta)(r). \tag{173}$$

بنابراین مطابق با آنچه که دراین درس دیدیم می توانیم گروه دوران را روی فضای توابع روی کره یعنی $C(S^2)$ نشان دهیم. این نمایش به این صورت است که

$$[D(R_n(\theta))f](r) = f(R_n(-\theta)r). \tag{174}$$

برای آنکه نمایش بی نهایت بعدی برای عناصر جبر بدست بیاوریم می بایست طرفین را نسبت به پارامترهای θ^i بسط دهیم و سپس نمایش عناصر جبر را با مقایسه دو طرف بدست آوریم. بنابراین می نویسیم

$$[D(e^{-i\theta n\cdot J})f](r) = f(R_n(-\theta)r) \tag{175}$$

برای θ های کوچک می دانیم که طرف راست عبارت است از: $f(\mathbf{r}-\theta\mathbf{n}\times\mathbf{r})$ و طرف چپ برابر است با $[D(I-i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})f](\mathbf{r})$. بنابراین رابطه 175 پس از کمی دستکاری به شکل زیر در می آید:

$$[D(I-i\theta n\cdot J)f](r) = f(r) - \theta n\times r\cdot\nabla f(r) \tag{176}$$

و یا

$$f(r) - i\theta n\cdot[D(J)f](r) = f(r) - \theta n\cdot r\times\nabla f(r) \tag{177}$$

از آنجا که این رابطه برای همه پارامترهای θ و $\mathbf{n}$ و به ازای همه توابع f صادق است، پس از کمی ساده کردن نتیجه می گیریم که

$$D(J) = -ir \times \nabla \tag{178}$$

و یا

$$\begin{aligned} D(J_x) &= -i(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}) \\ D(J_y) &= -i(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}) \\ D(J_z) &= -i(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}). \end{aligned} \tag{179}$$

به این ترتیب وقتی که نمایش گروه را روی فضای توابع روی کره در نظر می گیریم، یک نمایش به صورت عملگرهای دیفرانسیلی برای بردارهای پایه جبر روی این توابع بدست می آید.
نمایش های فوق چه برای جبر چه برای گروه بی نهایت بعدی اند. این در حالی است که ما در درس مکانیک کوانتومی دیده‌ایم و در این درس هم ثابت خواهیم کرد که نمایش های کاهش ناپذیر برای جبر تکانه زاویه‌ای همگی بعد محدود دارند. این نمایش ها همان نمایش های اسپین j هستند که در بالا به آن اشاره کردیم. با توجه به این مشاهده، پس می بایست نمایش های بی نهایت بعدی ای که روی فضای توابع بدست آورده‌ایم نمایش های کاهش پذیری باشند که به این نمایش های بنیادی کاهش ناپذیر تجزیه می شوند. آیا این انتظار درست است؟ پاسخ این سوال مثبت است. در واقع بازهم در درس مکانیک کوانتومی پاسخ این سوال داده شده است. هر گاه برای فضای توابع روی کره پایه مناسبی اختیار کنیم نمایش روی فضای توابع به نمایش های اسپین صحیح یعنی نمایش های D_l که در آن l یک عدد صحیح است تجزیه می شود. این پایه مناسب همان توابع هارمونیک کروی $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ هستند. به عبارت دیگر در این پایه عملگرهای دیفرانسیلی $D(J_x)$، $D(J_y)$ و $D(J_z)$ به صورت بلوکه قطری در می آیند. در نتیجه عملگرهای بی نهایت بعدی $D(R_n(\theta))$ نیز بلوکه قطری می شود. تفصیل این امر در درس مکانیک کوانتومی داده شده است و در آنجا نشان داده ایم که چگونه عملگرهای $D(J_i)$ وقتی که روی $Y_{l,m}$ ها اثر می کنند، تنها شاخص m را تغییر می دهند و شاخص l را دست نخورده باقی می گذارند. این امر به این معناست که عملگرهای دیفرانسیل $D(J_i)$ زیر فضای جاروب شده توسط توابع $\{Y_{l,m}, \ | \ -l \le m \le l\}$ را ناوردا باقی می گذارند و این امر به معنای تجزیه نمایش بی نهایت بعدی روی فضای توابع به نمایش های کاهش ناپذیر اسپین صحیح است. برای کامل بودن این بحث یادآوری می کنیم که اثر عملگرهای دیفرانسیلی $D(J_i)$ روی $Y_{l,m}$ به شکل زیراست:

$$\begin{aligned} &D(J_z)Y_{l,m} = mY_{l,m} \\ &D(J_+)Y_{l,m} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}Y_{l,m+1} \\ &D(J_-)Y_{l,m} = \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}Y_{l,m-1}. \end{aligned} \tag{180}$$

بحث ما در باره نمایش گروه‌ها در این جا به پایان می رسد. مطالعه سیستماتیک نمایش های جبرهای لی موضوعی است که در اخرین درس این درسنامه به آن خواهیم پرداخت. برای این کار نخست می بایست ساختمان جبرهای لی را مطالعه کنیم و این موضوع چند درس آینده است.